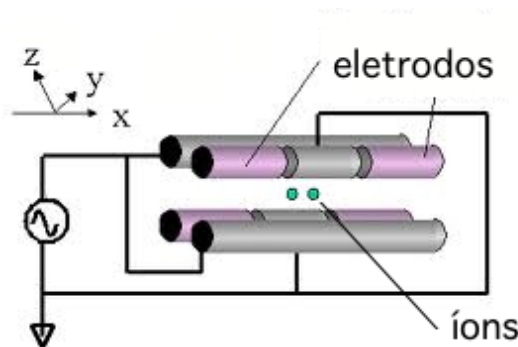


Instituto de Física - UFF
Mecânica Analítica - 2ºP/2013 - Prof. Daniel Jonathan
Lista de Exercícios 3 - teste na Quinta, 31/10

- Uma partícula move-se sem atrito na parte interna côncava de uma superfície de revolução $z = f(\rho)$, onde ρ, θ, z são coordenadas cilíndricas, e na presença de um campo gravitacional constante $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$.
 - Encontre a condição para que exista uma órbita circular de raio ρ_0 .
 - Mostre que uma órbita circular é estável ou instável conforme $3f'(\rho_0) + \rho_0 f''(\rho_0)$ seja positivo ou negativo.
 - Para as órbitas estáveis, encontre a frequência Ω das pequenas oscilações em torno do equilíbrio.
 - Analise o exemplo em que $f(\rho) = \frac{\rho^{1-a}}{1-a}$, onde $a > 1$
- Considere um pêndulo duplo formado por massas $m_1 \equiv 3m$ e $m_2 = m$, com Lagrangiana

$$L = \frac{4mR^2}{2}\dot{\theta}_1^2 + \frac{mR^2}{2}\dot{\theta}_2^2 + mR^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + mgR(4 \cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$

- Escreva a Lagrangiana aproximada para pequenas oscilações deste sistema ao redor do seu único ponto de equilíbrio estável.
 - Obtenha as frequências normais e os correspondentes modos normais. Represente os modos graficamente.
 - Sem fazer contas, descreva como será, qualitativamente, o movimento do pêndulo se ele for solto a partir do repouso de uma posição inicial em que $(\theta_1, \theta_2) = (2^\circ, 4^\circ)$. E se for $(\theta_1, \theta_2) = (2^\circ, 0^\circ)$?
 - Obtenha a solução das equações de movimento com as condições iniciais do item anterior.
 - Determine a matriz modal e as coordenadas normais do sistema.
- Uma *armadilha de íons* é um equipamento usado para capturar e manipular um pequeno número de íons (átomos carregados). Campos eletromagnéticos especialmente projetados criam um potencial efetivo com um mínimo local num ponto fixo do espaço. Ao redor deste ponto o potencial se comporta (para pequenas oscilações) como um oscilador harmônico tridimensional; $V(\vec{r}) \simeq \frac{1}{2}(k_x x^2 + k_y y^2 + k_z z^2)$. Em particular, nas chamadas ‘armadilhas lineares’, as constantes satisfazem $k_y, k_z \gg k_x$. Nesse caso, para energias suficientemente baixas, os íons só podem se deslocar apreciavelmente ao longo do eixo x , e podemos aproximar o movimento como sendo 1-dimensional. Quando há apenas um íon na armadilha, o seu movimento é portanto harmônico simples ao redor da origem, com $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Dois ou mais íons idênticos, porém, se repelem mutuamente com o potencial Coulombiano $V_{ij} = \frac{A}{|x_i - x_j|}$, onde $A = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}$. Nesse caso o sistema tem um ponto de equilíbrio onde a repulsão entre os íons é compensada pelo potencial externo.



- Considerando uma armadilha linear contendo $N = 2$ íons idênticos, calcule as suas posições de equilíbrio.
- Calcule as matrizes $\hat{T}$ e $\hat{V}$ para as pequenas oscilações deste sistema, sendo as coordenadas η_j dadas pelos deslocamentos de cada íon com respeito ao seu ponto de equilíbrio.
- Encontre as frequências características e os modos normais de vibração, e represente-os graficamente. Calcule o valor das frequências, e das posições de equilíbrio, no caso de íons de Cálcio 40 (carga $+e$, massa $6.64 \times 10^{-23}g$), e um potencial externo com $\omega_{ext} \equiv \sqrt{k/m} = 2\pi \times 10^5 \text{ rad/s}$ (valor típico p/ armadilhas reais).

Obs: Esta solução se generaliza facilmente para o caso com $N = 3$ íons na armadilha: os dois modos normais do caso $N = 2$ têm análogos diretos, e o terceiro modo é ortogonal aos primeiros dois. Para $N > 3$ os modos normais devem ser obtidos numericamente. Ref: Applied Physics B, vol.66 p.181 (1998), URL: <http://tinyurl.com/7ldx96e>.

4. A Lagrangeana

$$L = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \dot{\eta}_i^2 - \frac{k}{2} \sum_{l=0}^{N-1} (\eta_{l+1} - \eta_l)^2$$

descreve uma cadeia linear de $N-1$ osciladores de mesma massa m , conectados por molas iguais com constante de força k . (A coordenada η_j representa o deslocamento do j -ésimo oscilador a partir de sua posição de equilíbrio). Os extremos da cadeia são fixos, isto é, pode-se considerar que $\eta_0 = 0 = \eta_N$.

(a) Encontre as equações de movimento para $\eta_1, \dots, \eta_{N-1}$ e mostre que elas admitem os modos normais de vibração $\eta_l^{(s)}(t) = \rho_l^s \cos(\omega_s t + \phi_s)$, com

$$\rho_l^s = c^{(s)} \sin \frac{2\pi s l}{N}; \quad s, l = 1, \dots, N-1,$$

onde $c^{(s)}$ são constantes de normalização e as frequências características são $\omega_s = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{s\pi}{N}$.

(b) Mostre que cada vetor $\rho^{(s)}$ é normalizado pela escolha $c^{(s)} = \sqrt{\frac{2}{Nm}}$, independente de s .

(c) Se no instante $t = 0$ só o primeiro oscilador estiver deslocado da sua posição de equilíbrio ($\eta_1 \neq 0$), e todos os osciladores estiverem em repouso, determine $\eta_l(t)$.

Sugestão: use o fato de que os vetores $\rho^{(s)}$ formam um conjunto ortonormal

Observação físico-cultural: generalizações tridimensionais de modelos como este são utilizadas para descrever o comportamento de estruturas cristalinas, formadas por átomos dispostos numa rede regular. A estrutura dos modos normais de vibração permite então compreender muitas das propriedades mecânicas, térmicas, etc desses materiais. Uma concordância quantitativa com o experimento requer ainda que se faça versões quânticas desses modelos, ie, tratar cada modo normal como um oscilador harmônico quântico. Do ponto de vista quântico, uma excitação fundamental de um modo normal de uma rede cristalina é chamada de *fônon*. O nome vem do fato de que essas excitações, que são responsáveis pela transmissão do *som* no material, se propagam de forma análoga a uma partícula, com muitas semelhança ao comportamento dos *fótons* (mas com velocidade bem menor, é claro).

5. Vimos que qualquer matriz ortogonal própria A corresponde a uma rotação de um certo ângulo ϕ em torno de uma certa direção $\hat{n}$. O traço de uma matriz A , denotado por $\text{tr}A$, é a soma dos elementos da sua diagonal principal. Sabendo que o traço é independente do sistema de coordenadas, prove que o ângulo de rotação é dado por $\cos\phi = (\text{tr}A - 1)/2$.

Sugestão: escolha o sistema de coordenadas apropriadamente.

6. Uma esfera de raio R rola sem deslizar sobre uma superfície plana. Se (x, y, R) são as coordenadas do centro da esfera, mostre que, em termos dos ângulos de Euler, as condições de rolamento sem deslizamento são

$$\dot{x} - R(\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi) = 0; \quad \dot{y} + R(\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi) = 0$$

Sugestão: dê uma olhada nas expressões de ω_x e ω_y em termos dos ângulos de Euler.

Explique (sem fazer contas) por que esse vínculos não são holônomos.

7. A equação de movimento de uma partícula num referencial que gira com velocidade angular constante $\vec{\omega}$, e cuja origem O' tem ainda aceleração $\vec{a}_{O'}$ em relação a um referencial inercial é

$$m\vec{a} = \vec{F} - m\vec{a}_{O'} + 2m\vec{v} \times \vec{\omega} + m\vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega}),$$

a) Se a força $\vec{F}$ é conservativa, mostre que esta equação de movimento resulta da lagrangiana

$$L = \frac{mv^2}{2} - V - m\vec{r} \cdot \vec{a}_{O'} + \frac{m}{2}(\vec{\omega} \times \vec{r})^2 + m\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}),$$

onde $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ e V é a energia potencial de $\vec{F}$.

b) Obtenha a integral de Jacobi h associada a esta lagrangiana no caso em que $\vec{a}_{O'}$ é constante. Identifique o significado físico de cada termo nessa expressão.